INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM CORECTARE
CLASA A IX-A

1.

a) 1 verifică ecuaţia x^2-x =0, deci $1 \in$ A…………………………………………….. 1p

b) 1+$\sqrt{2}$ verifică ecuaţia x^2-2x-1=0, deci $1+\sqrt{2} \in A$………………………………… 2p

c) Dacă, prin reducere la absurd, $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in A$, atunci $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2+a\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+b=0$…1p

Găsim $\sqrt{6}$ $(2a^2-4b-20)=(b+5)^2+24-5a^2$……………………………………………………1p

Dacă $2a^2-4b-20 \neq 0$, atunci $\sqrt{6}=\dfrac{(b+5)^2+24-5a^2}{2a^2-4b-20}$, fals…………………………………1p

Urmează că $2a^2-4b-20=0$ şi $(b+5)^2+24-5a^2=0$, de unde găsim b=1 şi $a^2=12$ sau b=-1 şi $a^2=8$, ceea ce nu convine…………………………………………………………….................1p

2. a) Dacă x=1 obţinem f(0)=1……………………………………………………………2p

b) Notăm x-1=t şi găsim f(t)=2t+1………………………………………………….2p

c) Avem: S=$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+...+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{201}-\dfrac{1}{203}\right)$…………………………........2p

Obţinem S=$\dfrac{101}{203}$ ……………………………………………………………………………1p

3. a) Calcul……………………………………………………………………………1p

b) Folosind relaţia de la a) avem S=$\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}\right)+...+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}\right)$…………………2p

Deducem că S=$\dfrac{n-1}{a_1a_n}$ ……………………………………………………………………1p

c) Deoarece $1-\dfrac{r^2}{a_k^{\,2}}=\dfrac{a_{k-1}a_{k+1}}{a_k^{\,2}}$ …………………………………………………………1p

Obţinem P=$\dfrac{a_1a_3}{a_2^{\,2}}\cdot\dfrac{a_2a_4}{a_3^{\,2}}\cdot...\cdot\dfrac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^{\,2}}$ ……………………………………………………..1p

sau P=$\dfrac{a_1a_{n+1}}{a_2a_n}$ ……………………………………………………………………………..1p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

Profil Tehnic

4. a) Avem $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ si prin adunare obtinem relatia respectiva..1p

b)Analog, $2 \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{0C} + \overrightarrow{OD}$……………………………………………………1p

Din asemănarea triunghiurilor COD şi AOB avem $OC = kOA$ şi $OD = kOB$, unde

$k = \frac{CD}{AB}$ ……………………………………………………………………….....1p

Obţinem $\overrightarrow{OM} = -k \cdot \overrightarrow{ON}$, deci punctele M, N şi O sunt coliniare…………………………1p

c) Fie E punctul de intersecţie al dreptelor MN şi AD.

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ABD şi transversala M-O-E, avem

$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{OB}{OD} \cdot \frac{ED}{EA} = 1,\ sau\ \frac{OB}{OD} = \frac{EA}{ED}$ (1)…………………………………………..………1p

Analog pentru triunghiul ACD şi transversala O-N-E obţinem $\frac{OA}{OC} = \frac{EA}{ED}$ (2)……..…….1p

Din (1) şi (2) avem $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$, deci CD||AB……………………………………………1p

BAREM DE CORECTARE - CLASA A X-A

1. a) Obţine $x > y \Leftrightarrow \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ 2p

   Finalizare A>B 1p

   b) Observă $A+B=2AB \Leftrightarrow \frac{1}{A}+\frac{1}{B}=2$ 2p

   Finalizare $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=2 \Leftrightarrow \log_{x-y}(xy)=2 \Leftrightarrow \log_{x-y}(x-y)^2=\log_{x-y}(xy) \Leftrightarrow x^2+y^2=3xy$ ..2p

2.

a) Verifică $|z_1+i|=|z_1-i|$, deci $z_1=1\in M$ 1p

   Verifică $|z_2+i|\neq|z_2-i|$, deci $z_2\notin M$ 1p

b) Observă $|i\cdot z+1|=|i(z-i)|=|i|\cdot|z-i|=|z-i|$ 1p

   $|i\cdot z-1|=|i(z+i)|=|i|\cdot|z+i|=|z+i|$ 1p

   Finalizare $|i\cdot z+1|=|i\cdot z-1|\Leftrightarrow|z+i|=|z-i|$, deci $z\in M$ 1p

c) Verificăm $M\subset\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}\subset M$

   Dacă $z=a+bi\in M \to |a+i(b+1)|=|a+i(b-1)|$, deci b=0 iar $z\in R$ 1p

   Dacă $z=t\in R$, atunci $|t+i|=|t-i|$ este adevarată , deci $z\in M$ 1p

3.

a) Obţine $f(1)\cdot f(-1)=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=-1$ 2p

b) Obţine $\sqrt[3]{2+x\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-x\sqrt{5}}=\sqrt[3]{4}$ 1p

   Prin ridicare la puterea a treia obţine

   $4+3\cdot\sqrt[3]{4-5x^2}\cdot\sqrt[3]{4}=4$ 1p

   Finalizare : $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ 1p

c) De exemplu $t=5\sqrt{5}\in R\setminus Q$ iar $f(t)=3\in N$ 2p

4. Fie ***x*** este numărul pungilor de 1kg

y este numărul pungilor de 900 g

Atunci $x+y=2n$ (număr par) şi $1000x+900y=16800$ 2p

a) Dacă y=2 , atunci x=15 iar x+y = 17 , nu convine 2p

b) Obţine y=12 , x= 6 , deci în pachet sunt 18 pungi 3p

BAREM DE CORECTARE
CLASA A XI-A

1.

a) Verifică $A\cdot A^T = I_2$, deci A este ortogonală 2p

b) Admitem că matricea B este ortogonală .

Atunci $B\cdot B^T = I_2 \Leftrightarrow \det\left(B\cdot B^T\right)=1 \Leftrightarrow \det\left(B\right)=\pm 1$ 2p

c) Un exemplu îl constituie matricea $A=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}, t\in R$ 2p

Verificare: $\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}=I_2$ 1p

2.

a) Obţine $D(a,b)=\begin{vmatrix}a & b\\ -b & a-b\end{vmatrix}=a^2-a\cdot b+b^2$ 1p

Verifică $D(b,a)=b^2-ba+a^2=D(a,b)$ 1p

b) Obţine $D(x,1)\cdot D(x,-1)=\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)=x^4+x^2+1$ 2p

Obţine $D(x^2,-1)=x^4+x^2+1$, deci relaţia este adevarată 1p

c) Obţine $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{D\left(\sqrt{x},1\right)}{\sqrt{D(x,1)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ 1p

Finalizare $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2-x+1}}=1$ 1p

3.

a) Verifică egalitatea $\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^{x+1}}{x+1}=\dfrac{e^x\cdot(1+x-e\cdot x)}{x(x+1)}$ 2p

b) Studiem asimptotele verticale în $x_0=0$

$$\lim_{x\nearrow 0}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{x+1}}{x+1}\right)=-\infty,\ \lim_{x\searrow 0}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{x+1}}{x+1}\right)=+\infty$$

Aşadar $x=0$ este asimptotă verticală pentru graficul funcţiei 1p

Studiem asimptotele verticale în $x_0=-1$

$\lim\limits_{x\nearrow -1}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{x+1}}{x+1}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -1}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{x+1}}{x+1}\right)=-\infty$

Aşadar $x=-1$ este asimptotă verticală pentru graficul funcţiei …………1p

c) Scrie $f(1)+f(2)+...+f(n)=\left(\frac{e}{1}-\frac{e^2}{2}\right)+\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)+...+\left(\frac{e^n}{n}-\frac{e^{n+1}}{n+1}\right)$….1p

Obţine $f(1)+f(2)+...+f(n)=\left(e-\frac{e^{n+1}}{n+1}\right)$……………………………….1p

Finalizare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e-\frac{e^{n+1}}{n+1}\right)=-\infty$ …………..1p

4.

a) Seria primei chitanţe este 1023 iar a ultimei chitanţe 9870…………………2p
Au fost eliberate 9870-1022=8848 chitanţe ………………………………...1p
b) Obţine numărul autoturismelor $75\%\cdot 8848=6636$ …………………………..2p
c) Media zilnică este $8848:28=316$ autovehicule……………………………..2p

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

1.

a) Demonstrează echivalenţa
$x \in M \Leftrightarrow |x-3| \geq 1$ ……………………………………………………….………..1p

b) Pentru $x, y \in M \Rightarrow |x-3| \cdot |y-3| \geq 1 \Rightarrow xy-3x-3y+9 \leq -1$ sau $xy-3x-3y+9 \geq 1$,
deci $xy-3x-3y+12 \leq 2$ sau $xy-3x-3y+12 \geq 4$, adica $x \circ y \in M$ …………………1p

c) Scrierea corectă şi verificarea fiecareia dintre cele trei axiome câte 1p ………...3p

d) Scrie $U(M) = \{x \in M \mid \exists x' \in M \quad a.\ \ i.\ \ x \circ x' = 4\}$

Obţine $x' = 3 + \dfrac{1}{x-3}$ … ……………………………………………………………......1p

Din condiţia $x' \in M$ obţine $U(M) = \{2, 4\}$. …………………………………...…..1p

2.

a) Obţine $A^2 = A$, $B^2 = B$, $A \cdot B = O_2$, $B \cdot A = O_2$ …………………………………....2p

b) Obţine $E^3(a,b) = a^3 \cdot A + b^3 \cdot B$ ..…………………………………………......1p

Demonstrează $x^3 = x$, pentru orice $x \in Z_6$ …………………………………...1p

Finalizare $E^3(a,b) = E(a,b)$ … …………………………………………..…1p

c) Scrie $E(a,b)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(\mathrm{E}(a,b)) \in U(Z_6) = \{\hat{1}, \hat{5}\}$ …………….........1p

Finalizare : $\det(E(a,b)) = a \cdot b \in \{\hat{1}, \hat{5}\}$, $(a,b) \in \{(\hat{1},\hat{1}), (\hat{1},\hat{5}), (\hat{5},\hat{1}), (\hat{5},\hat{5})\}$ …1p

3.

a) Calculează $f(0) = \dfrac{1}{6}, \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \dfrac{1}{6}, \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \dfrac{1}{3} + a$ ……………………….....1 p

Dacă $a = -\dfrac{1}{6}$, atunci funcţia este continuă în $x_0 = 0$, deci este continuă pe R şi admite primitive ………………………………………………………..1p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

b) Din relaţia $\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}=\frac{m}{(x+1)}+\frac{n}{(x+2)}+\frac{p}{(x+3)}$

obţine $m=-\frac{1}{2}, n=1, p=-\frac{1}{2}$ 2p

O primitivă este

$F(x)=-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+3)$ 1p

c) Deoarece $x\in[0,4]$ rezultă că $(x+1)(x+2)(x+3)\geq 6$, deci $f(x)\leq\frac{1}{6}$ 1p

Prin integrarea relaţiei $f(x)\leq\frac{1}{6}$ se obţine $\int_0^4 f(x)dx\leq\frac{2}{3}$ 1p

4.

Notăm cu l- lungimea traseului (în km)
v- viteza medie de deplasare (km/h)
t- durata deplasării (h)

Scrie $l+v+t=304 \Leftrightarrow v\cdot t+v+t=304$, iar l, v, t- numere naturale........................ .. 2p

Obţine $(v+1)\cdot(t+1)=305$ 2p

Numai soluţia t=4, v= 60 convine 1p

Finalizare : $l=v\cdot t=240km$ 2p